EGZAMIN, TOPOLOGIA I - TEORIA, 08.02.23

UWAGA: Nie ma potrzeby pisania każdego dowodu/definicji na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego.

I. a). Podaj definicję przestrzeni topologicznej. Podaj (i krótko uzasadnij) przykład dwóch topologii w zbiorze X, $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ takich, że przekształcenie identycznościowe $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ jest ciągłe, natomiast $id : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ nie jest odwzorowaniem ciągłym.

b). Podaj definicję zwartości przestrzeni topologicznej.

c). Udowodnij, że jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą oraz $K \subset X$ jest zwartym podzbiorem w X to K jest podzbiorem domkniętym w X.

II. a). Podaj definicję przestrzeni topologicznej ośrodkowej.

b). Podaj przykład przestrzeni topologicznej ośrodkowej, która nie ma bazy przeliczalnej.

c). Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Udowodnij, że jeśli $(X, \mathcal{T})$ ma bazę przeliczalną to jest przestrzenią ośrodkową.

III. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(W, \mathcal{T}_W)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $f : X \to Y$, $g, g' : Y \to W$, $h : W \to Z$ odwzorowaniami ciągłymi.

a). Podaj definicję homotopii pomiędzy odwzorowaniami g i g'.

b). Podaj definicję homotopijnej równoważności przestrzeni topologicznych. Podaj, wraz z krótkim uzasadnieniem, przykład dwóch przestrzeni topologicznych, które są homotopijnie równoważne ale nie są homeomorficzne.

c). Udowodnij, że jeśli g jest homotopijne z g' to zarówno $g \circ f$ jest homotopijne z $g' \circ f$ jak i $h \circ g$ jest homotopijne z $h \circ g'$.

EGZAMIN, TOPOLOGIA I, 08.02.23.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Dla liczb wymiernych $q \in Q \cap (-1,1)$ niech $I_q = \{(q,t) \in R^2 \mid |t| \leq |q|\}$. Niech

$$X = \bigcup_{q \in Q \cap (-1,1)} I_q \cup ([-1,1] \times \{0\}) \cup ([-1,1] \times \{1\})$$

(A.) Udowodnić, że X jest zbiorem spójnym.

(B.) Udowodnić, że X nie jest zbiorem łukowo spójnym.

2. Niech $X = \{(x,y) \in R^2 \mid x = 1/n\ ,\ -1/n < y < 1/n,\ n = 1,2,...\}$

(A.) Czy zbiór X jest przestrzenią zupełną jako podzbiór (R^2, d_k) (d_k - metryka kolejowa). Jesli tak nie jest to proszę sprawdzić czy zbiór X z topologią generowaną przez metrykę d_k jest przestrzenią topologiczną metryzowalną w sposób zupełny.

(B.) Czy X jest przestrzenią zupełną jako podzbiór (R^2, d_r) (d_r - metryka rzeka). Jesli tak nie jest to proszę sprawdzić czy zbiór X z topologią generowaną przez metrykę d_r jest przestrzenią topologiczną metryzowalną w sposób zupełny.

3. Niech F będzie zbiorem domkniętym i brzegowym zawartym w odcinku $[0,1]$. Dla $q \in Q$ zdefiniujmy podzbiór płaszczyzny euklidesowej

$$K_q = \{(cos 2\pi(t+q), sin 2\pi(t+q)) \mid t \in F\} \subset S^1.$$

Niech

$$K = \bigcup_{q \in Q} K_q$$

Udowodnić, że istnieje prosta L w R^2 przechodząca przez punkt $(0,0)$ taka, że $L \cap K = \emptyset$.

4. (A.) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, I odcinkiem domkniętym $[0,1]$. Rozważmy przestrzeń $X \times I$ oraz jej podzbiór $A = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $Y =$ ~~[illegible]~~ jest łukowo spójna.

(B.) Udowodnić, że Y nie jest przestrzenią ściągalną. $X \times I/A$

Wskazówka do części (B). Np. wystarczy pokazać, że istnieje odwzorowanie $S^1 \to Y$, które nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.